

Третий тур 30.11.2024. Вторая лига.

1. На клетчатой плоскости расположен выпуклый многоугольник M с вершинами в узлах сетки. Докажите, что для любого $\lambda > 1$ на клетчатой плоскости можно расположить два различных многоугольника с вершинами в узлах сетки, подобных M , так, чтобы один содержался строго внутри другого, их соответствующие стороны не были параллельны, а их периметры отличались не более чем в λ раз.

2. Дано натуральное число n . На большой гирлянде висит $2n + 1$ лампочка. Каждую секунду некоторые лампочки загораются, а некоторые — гаснут. Дима наблюдает за гирляндой и записывает, сколько лампочек горит. Он заметил, что если в данный момент горит k лампочек, то к следующей секунде ровно k лампочек изменяют свое состояние. Дима наблюдал за гирляндой t секунд и записал t попарно различных чисел. Найдите наибольшее возможное значение t . Ответ может зависеть от n .

3. Пусть S — центр масс равностороннего тетраэдра $ABCD$, P — произвольная точка внутри него. Точку P отразили относительно граней тетраэдра $ABCD$ и получили точки X , Y , Z и T . Докажите, что центр масс тетраэдра $XYZT$ лежит на отрезке PS , и найдите в каком отношении он делит этот отрезок.

4. Функция $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что для любых $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(a, b, c) + f(b, c, d) + f(c, d, e) + f(d, e, a) + f(e, a, b) = 5.$$

Докажите, что для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено $f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b) = 3$.

5. На доске 101×101 расставлено несколько шахматных коней так, что каждая клетка доски побита четным числом коней, возможно, ни одним. Докажите, что множество клеток, на которых стоят кони, симметрично относительно центральной строки и центрального столбца. Считается, что конь **не** бьет клетку, на которой он стоит.

6. Найдите все натуральные n такие, что число $3^n - 2^n - 1$ является квадратом целого числа.

7. В треугольнике ABC с тупым углом $\angle A$ точки E и F — основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекают прямую EF в точках K и L соответственно. Оказалось, что $\angle CLB = 135^\circ$. На отрезке BK выбрана точка X так, что $KX = KL$, а на продолжении луча BK за точку K выбрана точка Y так, что $\angle BLY = 135^\circ$. Докажите, что окружность с диаметром XY касается описанной окружности треугольника ABC .

8. Последовательности вещественных чисел a_1, a_2, a_3, \dots и ненулевых вещественных чисел b_1, b_2, b_3, \dots таковы, что для каждого натурального n выполнены условия

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1}, \\ b_{n+2} &= a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n. \end{aligned}$$

Оказалось, что существует последовательность чисел c_1, c_2, c_3, \dots такая, что для каждого натурального n многочлен $x^6 + c_{2n-1}x^5 + c_{2n}x^4 + \dots + c_{2n+4}$ имеет 6 вещественных корней, равных

$$\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}, \frac{a_{2n}}{b_{2n}}, \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}, \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}}, \frac{a_{2n+3}}{b_{2n+3}}, \frac{a_{2n+4}}{b_{2n+4}}.$$

Докажите, что $c_{2n-1} + c_{2n+3} = c_{2n+1}$ для всех натуральных n .

9. По кругу написаны числа a_1, a_2, \dots, a_{100} , каждое из которых равно либо «+1», либо «−1». Раз в минуту Игорь проделывает следующий ритуал: смотрит на часы, затем меняет знак у числа a_i , рядом с которым находится, после чего отправляется к числу a_{i+a_i} ($a_0 = a_{100}$, $a_{101} = a_1$). В 10:00 Игорь впервые обнаружил, что числа такие же, как были изначально, а он находится в том же самом месте, где начинал свое путешествие. Сколько времени будет на часах, когда Игорь увидит такую ситуацию во второй раз? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

10. Назовем натуральное число *безнулевым*, если в его десятичной записи нет нулей, в противном случае, назовем его *нулевым*. Верно ли, что для любого натурального k найдется натуральное n такое, что количество нулевых чисел, не превосходящих n , ровно в k раз больше количества безнулевых чисел, не превосходящих n ?

Третий тур 30.11.2024. Третья лига.

1. Можно ли расположить на плоскости 126 квадратов со сторонами $1, 2, 3, \dots, 126$ так, что их стороны параллельны осям координат, квадраты пересекаются только по вершинам, и для любого квадрата A существует ровно два других квадрата, имеющих с A общую вершину?

2. Дано натуральное число n . На большой гирлянде висит $2n + 1$ лампочка. Каждую секунду некоторые лампочки загораются, а некоторые — гаснут. Дима наблюдает за гирляндой и записывает, сколько лампочек горит. Он заметил, что если в данный момент горит k лампочек, то к следующей секунде ровно k лампочек изменяют свое состояние. Дима наблюдал за гирляндой t секунд и записал t попарно различных чисел. Найдите наибольшее возможное значение t . Ответ может зависеть от n .

3. Пусть S — центр масс равностороннего тетраэдра $ABCD$, P — произвольная точка внутри него. Точку P отразили относительно граней тетраэдра $ABCD$ и получили точки X, Y, Z и T . Докажите, что центр масс тетраэдра $XYZT$ лежит на отрезке PS , и найдите в каком отношении он делит этот отрезок.

4. Функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(a, b) + f(b, c) + f(c, a) = 0.$$

Докажите, что существует функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(a, b) = g(a) - g(b)$, для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

5. На доске 7×7 расставлено несколько шахматных коней так, что каждая клетка доски побита четным числом коней, возможно, ни одним. Докажите, что множество клеток, на которых стоят кони, симметрично относительно центральной строки и центрального столбца. Считается, что конь **не** бьет клетку, на которой он стоит.

6. Найдите все натуральные n такие, что число $3^n - 2^n - 1$ является квадратом целого числа.

7. В треугольнике ABC с тупым углом $\angle A$ точки E и F — основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке D . Отрезки DB и DC пересекают отрезок EF в точках K и L . Докажите, что центр вневписанной окружности треугольника DKL лежит на прямой BC .

8. Последовательности вещественных чисел a_1, a_2, a_3, \dots и ненулевых вещественных чисел b_1, b_2, b_3, \dots таковы, что для каждого натурального n выполнены условия

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1}, \\ b_{n+2} &= a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n. \end{aligned}$$

Оказалось, что существует последовательность чисел c_1, c_2, c_3, \dots такая, что для каждого натурального n многочлен $x^6 + c_{2n-1}x^5 + c_{2n}x^4 + \dots + c_{2n+4}$ имеет 6 вещественных корней, равных

$$\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}, \frac{a_{2n}}{b_{2n}}, \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}, \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}}, \frac{a_{2n+3}}{b_{2n+3}}, \frac{a_{2n+4}}{b_{2n+4}}.$$

Докажите, что $c_{2n-1} + c_{2n+3} = c_{2n+1}$ для всех натуральных n .

9. По кругу написаны числа a_1, a_2, \dots, a_{100} , каждое из которых равно либо «+1», либо «−1». Раз в минуту Игорь проделывает следующий ритуал: смотрит на часы, затем меняет знак у числа a_i , рядом с которым находится, после чего отправляется к числу a_{i+a_i} ($a_0 = a_{100}$, $a_{101} = a_1$). В 10:00 Игорь впервые обнаружил, что числа такие же, как были изначально, а он находится в том же самом месте, где начинал свое путешествие. Сколько времени будет на часах, когда Игорь увидит такую ситуацию во второй раз? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

10. Назовем натуральное число *безнулевым*, если в его десятичной записи нет нулей, в противном случае, назовем его *снулевым*. Верно ли, что для любого натурального k найдется натуральное n такое, что количество снулевых чисел, не превосходящих n , ровно в k раз больше количества безнулевых чисел, не превосходящих n ?